Synergies Pays Riverains du Mékong n°5 - 2013 p. 205-207

Les nombres nous aident à découvrir les merveilles de la nature

Trương Quang Đệ

Dans la vie de tous les jours, les nombres nous sont tellement familiers que rarement nous y pensons en nous posant des questions simples du genre: “qu’est-ce qu’un nombre?”, “combien sont-ils?”, “d’où viennent-ils?”, “qui les a inventés?” etc. Or les ensembles des nombres (depuis les entiers naturels jusqu’aux hypercomplexes), les chiffres arabes, le système de numération par position des Mésopotamiens, le zéro des Indiens, les nombres trancendants “pi” et “e”, le nombre imaginaire “i”, tout cela relève du génie de l’esprit humain.

Grâce aux nombres l’humanité avance dans le sens du progrès par étapes successives, d’un monde primitif à des mondes de plus en plus civilisés. Nous essayerons de faire brièvement ici le bilan de cette évolution plusieurs fois millénaire. D’abord rappelons comment nous avons fait connaissance avec les nombres lorsque nous étions sur le banc de l’école.

À l’école primaire nous apprenons les nombres entiers naturels 1, 2, 3, 4 etc. et à compter les choses: un chat, deux oiseaux, trois chevaux etc. Compter c’est mettre l’ensemble des objets à considérer en correspondance un à un avec l’ensemble des entiers naturels, c’est-à-dire “coller” un nombre naturel à chacun des objets de l’ensemble.

Au collège et au lycée, outre les entiers naturels, nous faisons connaissance avec les nombres relatifs qui constituent l’ensemble des entiers positifs et des entiers négatifs: +1, +2, +3…….., -1, -2, -3….etc.

Les nombres entiers négatifs apparaissent avec les soustractions dans lesquelles le premier terme est plus petit que le second terme. Exemple: 3 – 5 = -2. Dans la pratique, les nombres négatifs servent à désigner les dettes, les températures au-dessous de zéro etc.

Puis nous apprenons les fractions, les nombres issus de partages des objets entiers en plusieurs parties, par exemple 2 gâteaux pour 7 enfants (2/7). L’ensemble N des entiers naturels, l’ensemble Z des relatifs (entiers positifs et négatifs), l’ensemble des fractions forment l’ensemble Q des rationnels.

Ensuite, toujours au collège et au lycée, nous avons affaire à deux types de nombres nouveaux: les nombres irrationnels (comme la racine carré de 2, la racine cubique de

5….) issus de la solution des équations algébriques (ex: $ax^2 + bx + c = 0$), le nombre transcendant "pi" et autres nombres logarithmiques. Tout le monde sait que "pi" est le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre à savoir C /(2R) = pi où C est la circonférence et R le rayon du cercle.

L'ensemble Q des rationnels et l'ensemble des solutions des équations algébriques forment l'ensemble A des nombres algébriques. Celui-ci forme avec les nombres transcendants comme "pi" et les logarithmes l'ensemble des nombres réels R.

Les étudiants de mathématiques à l'Université et dans les Écoles Supérieures ont l'occasion de faire connaissance avec d'autres nombres transcendants dont le plus célèbre sera le nombre "e". Ce nombre, en développement décimal égal à 2, 71828….., était étroitement lié aux opérations financières avec intérêts redoublés à l'infini. Il connaît maintenant, comme son ami "pi" découvert il y a déjà près de 4000 ans, de nombreuses applications en physique, en chimie, en biologie et en théorie des probabilités. Les nombres "e" et "pi" se retrouvent dans plusieurs phénomènes de la nature.

Les étudiants de mathématiques doivent connaitre aussi un nombre appelé "imaginaire" et noté "i" qui est la racine carrée de –1 ($i^2 = -1$) . Un nombre écrit sous forme de a + bi (a, b sont des nombres réels) est un nombre complexe. Les nombres complexes n'existent pas explicitement ni physiquement dans la nature. Ils constituent par contre un moyen intellectuel merveilleux qui nous aide à prendre le chemin le plus court pour explorer la nature. C'est grâce à eux que les ingénieurs électriciens, les physiciens des particules, les spécialistes d'aérodynamique peuvent résoudre des problèmes techniques quotidiens.

À l'instar des nombres complexes, on crée d'autres nombres plus "vastes" comme par exemple les nombres hypercomplexes ou quaternions. Un quaternion s'écrit a + bi +cj + dk avec a, b, c, d des réels et i, j, k des imaginaires. Les nombres hypercomplexes sont particulièrement appréciés par les physiciens surtout les ingénieurs en robotique.

Bref, lorsqu'une difficulté se présente dans ses calculs, l'homme essaie de créer un nouveau type de nombre afin de surmonter l'obstacle. On peut voir de la manière suivante l'évolution des nombres:

Les entiers naturels N …. pour compter 1, 2, 3, 4, ….
Les relatifs Z……………………… pour résoudre des équations du type :
x + 5 = 3 (x = -2).
Les rationnels Q……………….. pour résoudre des équations du type :
5x – 7 = 0 (x = 7/5).
Les réels R …………………………. pour résoudre des équations du type :
$x^2 = 3$ (x = racine carrée de 3)
Les complexes C ……………… pour résoudre des équations du type
$x^2 + 5 = 0$

On a deux solutions :
x = i multiplié par la racine carrée de 5
x’ = -i multiplié par la racine carrée de 5

Le mathématicien suisse Euler a donné une formule qui réunit de façon miraculeuse les trois nombres, deux transcendants et un imaginaire. C’est

$$\mathbf{e}^{i\text{Õ}} + 1 = 0.$$

Quelle beauté mathématique! Quelle puissance de l’esprit humain!

Revenons maintenant à l’ensemble des entiers naturels. Cet ensemble, bien qu’il soit très simple, présente de nombreuses propriétés extraordinaires :

- d’abord, il s’agit d’un ensemble infini, c’est-à-dire qu’il n’y a pas un nombre qui soit plus grand que les autres.

- À l’intérieur de cet ensemble de nombres naturels nous avons des sous-ensembles tels que l’ensemble des nombres pairs, l’ensemble des nombres impairs, l’ensemble des carrés des entiers (1^2, 2^2, 3^2, 4^2.....), l’ensemble des nombres premiers (un nombre est dit premier quand il n’a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même: 2, 3, 5, 7, 11.....). Ce qui est étrange, c’est que la puissance (ou le cardinal) de tous ces ensembles est la (le) même. On a autant d’éléments dans N (naturels) que dans I (nombres impairs), dans Pa (nombres pairs) ou dans P (nombres premiers). Avec les ensembles infinis, le tout est égal à une de ses parties! On peut illustrer ce paradoxe par l’histoire suivante, racontée souvent avec plaisir par le mathématicien allemand Hilbert.

« Le gros bourgeois allemand Georg Cantor a eu la folie de fonder un hôtel doté d’une infinité de chambres numérotées 1, 2, 3, 4.....jusqu’à l’infini. Ce jour-là l’hôtel était complet, mais un voyageur est arrivé, voulant louer une chambre.

Pas de problèmes, a dit le gérant du nom de Hilbert, vous allez prendre la chambre numéro un, je m’occupe du reste”.

Le gérant a demandé alors à l’occupant de la chambre 1 de passer à la deuxième, à celui de la deuxième de passer à la troisième et ainsi de suite. Tout a été bien réglé. Le jour suivant un car avec une infinité de voyageurs est venu à l’hôtel.

“Pas de problèmes, a dit toujours le gérant, vous aurez tous vos chambres, bien que l’hôtel soit complet”.

Et il a demandé aux anciens occupants de déménager vers les chambres impaires, laissant les chambres paires aux nouveaux arrivants ».